Correction d’exercices : Fonctions trigonométriques

1. Exercice 1 :

Enoncé :

Démontrer que

$$\forall\, x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\quad \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)} = \tan(\frac{t}{2})$$

Correction :

$$\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{1-(1-2sin^2(\frac{t}{2}))}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(\frac{t}{2})} = \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\cos(\frac{t}{2})} = \tan(\frac{t}{2})$$

2. Exercice 2 :

Enoncé :

Vérifier que

$$Arcsin(x) + Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

Aide : faire une étude de fonction.

Correction :

Soit f la fonction sur [−1,1] définie par

$$f(x) = Arcsin(x) + Arcos(x)$$

Alors

$$\forall x \in]-1,1[\,, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Donc f est une fonction constante sur l’intervalle [−1,1] (car continue aux extrémités).

Or

$$f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\forall\, x \in [-1,1], f(x) = \frac{\pi}{2}$$

3. Exercice 3 :

Enoncé :

Etudier la fonction $f(x) = cos^2(x)sin(2x)$

Correction :

f est définie sur $\mathbb{R}$
$f(-x) = -cos^2(x)sin(2x) = -f(x)$ donc f est impaire
$f(x+\pi) = cos^2(x+\pi)sin(2x+2\pi) = (-cos)^2(x)sin(2x) = f(x)$ donc f est π-périodique
On étudie f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ car f est impaire et π-périodique.
f est dérivable :

$$f'(x) = 2cos(x)(-sin(x))sin(2x) + cos^2(x)2cos(2x)$$

Après transformation et en utilisant la formule $\sin^2(t)=1-\cos^2(t)$, on obtient :

$$f'(x) = 2cos^2(x)[4cos^2(x) - 3]$$

f' s'annule lorsque cos(x)=0 ou $cos^2(x) = \frac{3}{4}$.
Sur l'intervalle étudié, on a :
f croit de 0 à $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ puis décroit jusqu'à 0. Le maximum est atteint lorsque $x = \frac{\pi}{6}$.

4. Exercice 4 :

Enoncé :

En posant $t = tan(\frac{x}{2})$ exprimez $cos(x)$, $sin(x)$ et $tan(x)$.

Aide :

Utilisez les formules de calcule de $cos(a+b), sin(a+b)$, en posant $a = b = \frac{x}{2}$

Correction :

1. Cos(x)

$$\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(1 - \frac{sin^2(\frac{x}{2})}{cos^2(\frac{x}{2})}\right)cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = (1 - tan^2\left(\frac{x}{2}\right))cos^2(\frac{x}{2})$$

Or

$$(\tan(x))' = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

Donc

$$cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1 + tan^2(\frac{x}{2})}$$

D'où

$$\cos(x) = \frac{1 - tan^2(\frac{x}{2})}{1 + tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

2. Sin(x)

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + tan^2(\frac{x}{2})}$$

D'où

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

3. Tan(x)

- Méthode 1 :

On a fait les calculs précédents,

$$\cos(\mathrm{x}) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ et } \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Et donc comme

$$tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{2t}{1 + t^2}}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}}$$

D'où

$$\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$

- Méthode 2 :

On ne voie pas le lien avec les autres calculs : On utilise la formule $tan(a + b)$ et on pose $a = b = \frac{x}{2}$

$$\tan(x) = \frac{2tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1 - t^2}$$